Przykład 1.12

Rozkład Poissona. Niech

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Wówczas dla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}\frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n}.$$

Zatem dla rozkładu Poissona $a = 0$, $b = \lambda$ w założeniu 1.24.

Przykład 1.13

Rozkład dwumianowy. Niech

$$p_n = \binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}, \quad p \in (0,1), \quad n = 0, 1, \ldots m.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n-1}} &= \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n-1}}\frac{p^n}{p^{n-1}}\frac{(1-p)^{m-n}}{(1-p)^{m-n+1}}\\ &= \frac{(n-1)!(m-n+1)!}{n!(m-n)!}\frac{p}{1-p}\\ &= \frac{m-n+1}{n}\frac{p}{1-p}\\ &= -\frac{p}{q} + \frac{(m+1)p}{q}\frac{1}{n}, \quad \textit{gdzie} \quad q = 1-p.\end{aligned}$$

A zatem dla rozkładu dwumianowego $a = -\frac{p}{q}$, $b = (m+1)\frac{p}{q}$.

Przykład 1.14

Rozkład ujemny dwumianowy. Niech $r > 0$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$ oraz

$$p_n = \binom{r+n-1}{n}p^r q^n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Wówczas

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{r+n-1}{n}}{\binom{r+n-2}{n-1}}q = \frac{r+n-1}{n}q = q + \frac{r-1}{n}q.$$

A zatem dla rozkładu ujemnego dwumianowego $a = q$, $b = (r-1)q$.

Przykład 1.15
Rozkład logarytmiczny. Niech

$$p_n = -\frac{1}{\ln(1-\beta)}\frac{\beta^n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\beta \in (0, 1)$. *Wówczas*

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \beta - \frac{\beta}{n}.$$

Rozkład logarytmiczny spełnia założenie 1.24 *z* $a = \beta$ *i* $b = -\beta$.

Z powyższych przykładów wynika, że założenie 1.24 spełniają wszystkie rozkłady liczby szkód rozpatrywane do tej pory.

Co do zmiennych, oznaczających składniki sumy $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$, będziemy zakładać, że zachodzi

Założenie 1.25
Niezależne zmienne X_j *mają ten sam rozkład arytmetyczny, który nie jest zdegenerowany do jednego atomu w* 0, *oraz są niezależne od* N.

Oznaczmy

$$f_n = \mathcal{P}(X_1 = n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zauważmy, że przy założeniach 1.24 i 1.25 rozkład sumy $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ jest rozkładem arytmetycznym. Zachodzi wtedy następujące

Twierdzenie 1.26
(Wzór rekurencyjny Panjera) Jeśli spełnione są założenia 1.24 *i* 1.25, *to w przedstawionym powyżej modelu*

$$\mathcal{P}(S = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_0^n, \tag{1.29}$$

$$\mathcal{P}(S = k) = \frac{1}{1 - a f_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{j}{k}\right) f_j \mathcal{P}(S = k - j), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.30}$$

gdzie w pierwszym wzorze przyjmujemy umowę, że $c^0 = 1$ *dla dowolnego* $c \in \mathbb{R}$.

Uwaga 1.27. *Aby w pełni skorzystać ze wzoru Panjera dla losowej liczby szkód, należy dokonać dyskretyzacji ciągłego rozkładu pojedynczej szkody. Ponieważ wartości szkód są wyrażone w jednostkach pieniężnych (w Polsce najmniejszą jednostką jest* 1 *grosz) można*